



深圳北理莫斯科大學

УНИВЕРСИТЕТ МГУ-ППИ В ШЭНЬЧЖЭНЕ

SHENZHEN MSU-BIT UNIVERSITY

Математическое моделирование и
исследование моделей с помощью
математических программ

数学建模及数学软件的使用

Лекция № 8 (微分方程)

张晔

ye.zhang@smbu.edu.cn

微分方程/Differential equation, DE/ Дифференциальное уравнение, ДУ

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x,$$

的解是

$$y = -\cos x + C,$$

其中 C 是待定常数;

例如, 如果知道

$$y = f(\pi) = 2,$$

则可推出

$$C = 1,$$

而可知 $y = -\cos x + 1,$

Зам.

初值/边界值

分类

- **Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)** — это уравнения, зависящие от одной независимой переменной; они имеют вид

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

- **Дифференциальные уравнения в частных производных (УРЧП)** — это уравнения, содержащие неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные.
- Общий вид таких уравнений можно представить в виде:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0,$$

线性偏微分方程/partial differential equation/pde

- Линейное уравнение второго порядка, содержащее две независимые переменные, имеет вид:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0.$$

1. $D = B^2 - AC > 0$ — Гиперболическое уравнение,
2. $D = B^2 - AC < 0$ — Эллиптическое уравнение,
3. $D = B^2 - AC = 0$ — Параболическое уравнение (здесь предполагается, что в данной точке коэффициенты A , B , C не обращаются в нуль одновременно).

If there are n independent variables x_1, x_2, \dots, x_n a general linear partial differential equation of second order has the form

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{plus lower-order terms} = 0.$$

The classification depends upon the signature of the eigenvalues of the coefficient matrix $a_{i,j}$.

1. Elliptic: the eigenvalues are all positive or all negative.
2. Parabolic: the eigenvalues are all positive or all negative, save one that is zero.
3. Hyperbolic: there is only one negative eigenvalue and all the rest are positive, or there is only one positive eigenvalue and all the rest are negative.
4. Ultrahyperbolic: there is more than one positive eigenvalue and more than one negative eigenvalue, and there are no zero eigenvalues. There is only a limited theory for ultrahyperbolic equations (Courant and Hilbert, 1962).

Примеры

Лапласовский уравнение [редактировать]

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

применяется для решения задач в гравитационном поле

Пoisson уравнение [редактировать]

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

применяется для всех веществ или зарядов в гравитационном поле или электростатическом поле.

Волновое уравнение [редактировать]

неизвестная функция $u(x, y, z, t)$:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

$$\ddot{u} = c^2 \nabla^2 u$$

Уравнение теплопроводности [редактировать]

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

где k — коэффициент теплопроводности материала.

Одномерное уравнение теплопроводности [править | править код]

Уравнение, описывающее распространение тепла в однородном стержне относится к параболическому типу и имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где $u(t, x)$ — температура, и α — положительная константа, описывающая скорость распространения тепла. Задача Коши ставится следующим образом:

$$u(0, x) = f(x),$$

где $f(x)$ — произвольная функция.

Уравнение колебания струны [править | править код]

$$\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнение относится к гиперболическому типу. Здесь $u(t, x)$ — смещение струны из положения равновесия, или избыточное давление воздуха в трубе, или магнитуда электромагнитного поля в трубе, а c — скорость распространения волны. Для того, чтобы сформулировать задачу Коши в начальный момент времени, следует задать смещение и скорость струны в начальный момент времени:

$$u(0, x) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x),$$

Двумерное уравнение Лапласа [править | править код]

Уравнение Лапласа для неизвестной функции двух переменных имеет вид:

$$\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Уравнение эллиптического типа. Его решения называются гармоническими функциями.

著名的微分方程

物理及工程 [编辑]

- 动力学中的牛顿第二运动定律
- 经典力学中的欧拉 - 拉格朗日方程
- 经典力学中的哈密顿力学
- 热力学中的牛顿冷却定律
- 波动方程
- 电磁学中的麦克斯韦方程组
- 热力学中的热传导方程
- 定义调和函数的拉普拉斯方程
- 泊松方程
- 广义相对论中的爱因斯坦场方程
- 量子力学中的薛定谔方程
- 测地线
- 流体力学中的纳维 - 斯托克斯方程
- 随机过程中的扩散方程
- 流体力学中的对流 - 扩散方程
- 复变分析中的柯西 - 黎曼方程
- 分子动力学中的泊松 - 玻尔兹曼方程
- 浅水方程
- 通用微分方程
- 劳仑次吸子，其解包括了混沌现象

生物学 [编辑]

- 威尔霍斯特方程-生物族群增长模型
- 个体成长模型-生物个体增长模型
- 洛特卡 - 沃尔泰拉方程-掠食者和猎物的动态模型
- 复制方程-应用在生物数学中
- Hodgkin-Huxley模型-神经的动作电位

经济学 [编辑]

- 布莱克-休斯方程
- 索洛模型
- 马尔萨斯模型
- 塞西广告模型

历史

- **起源** ≈ 十七世纪末, 为解决物理及天文学问题而产生, 和微积分的发展同时。
- **惠更斯**在1693年的《教师学报》中提到常微分方程, **雅各布·白努利**在1691年建立悬链线的微分方程, 并求得其函数。
- 微分方程在十八世纪中期成为一个独立的学科, 而微分方程也带动许多当时的科学发展, 例如**海王星的发现**就和微分方程的分析有关。
- 偏微分方程是由**傅里叶**开始的, 他在1822年发表《热的解析理论》, 提出热传导方程的偏微分方程, 并且利用分离变量法求得级数解, 并且开始有关傅里叶级数的研究。
- 十九世纪有关**拉普拉斯方程**的研究也是偏微分方程的重要发展。拉普拉斯和泊松都有许多的贡献, 后来乔治·格林提出了相关格林函数及格林公式等概念, 并带动斯托克斯、麦克斯韦及后来电磁学相关的研究。
- 而流体力学的**纳维-斯托克斯方程**及弹性介质的柯西方程也是在十九世纪提出的偏微分方程。
- 许多的理论都是以偏微分方程的形式出现, 如: 量子力学的基础方程**薛定谔方程**, 广义相对论中的**爱因斯坦重力场方程**。

研究内容

- 只有少数简单的微分方程可以求得解析解。
- 不过即使没有找到其解析解，仍然可以确认其解的部分性质。
- 在无法求得解析解时，可用数值分析的方式，利用电脑来找到其数值解。

解的存在性及唯一性

- 存在性是指给定一微分方程及约束条件，判断其解是否存在。
- 唯一性是指在上述条件下，是否只存在一个解。
- 常微分方程的初值问题：皮亚诺存在性定理可判别解的存在性，柯西-利普希茨定理则可以判别解的存在性及唯一性。
- 偏微分方程：柯西-克瓦列夫斯基定理可以判别解的存在性及唯一性。

数值法解偏微分方程

- 有限元法 (Finite Element Method, FEM, Метод конечных элементов)
- 有限体积法 (Finite Volume Method, FVM, Метод конечных объёмов)
- 有限差分法 (Finite Difference Method, FDM, Метод конечных разностей)

数学模型

传染病模型

模型1

已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触 (足以使人致病) 人数为 λ

建模

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \lambda i$$

$$i(0) = i_0$$



$$i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$



$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，
则不能使病人数增加



必须区分已感染者(病人)
和未感染者(健康人)

传染病模型

模型2

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1) 总人数 N 不变, 病人和健康人的比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2) 每个病人每天有效接触人数为 λ , 且使接触的健康人致病

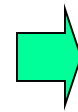
$\lambda \sim$ 日接触率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si$$

$$s(t) + i(t) = 1$$

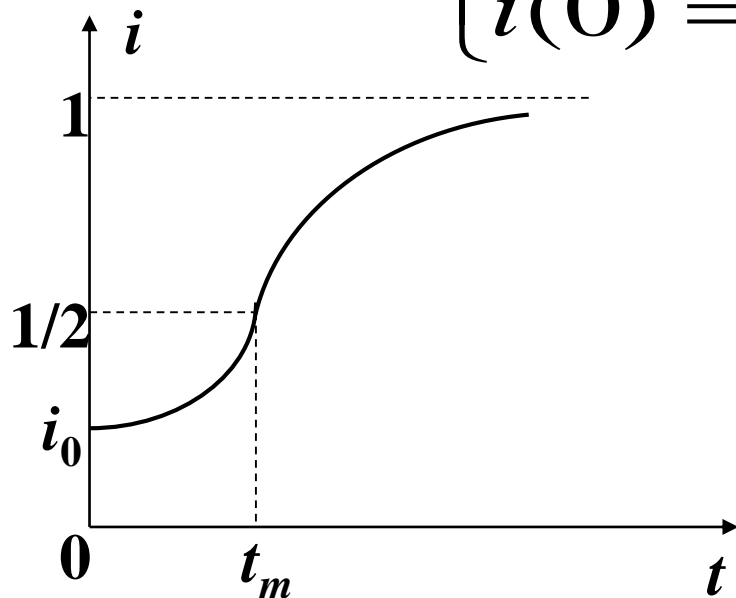


$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

传染病模型

模型2

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$t=t_m, di/dt$ 最大

$t_m \sim$ 传染病高潮到来时刻

λ (日接触率) $\downarrow \rightarrow t_m \uparrow$

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right) e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right)$$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 1$?

病人可以治愈!

传染病模型

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设

3) 病人每天治愈的比例为 μ

μ ~ 日治愈率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

λ ~ 日接触率

$1/\mu$ ~ 感染期

$$\sigma = \lambda / \mu$$

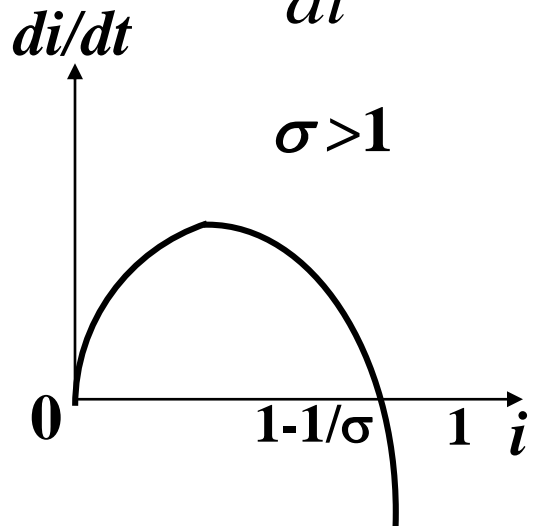
σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

传染病模型

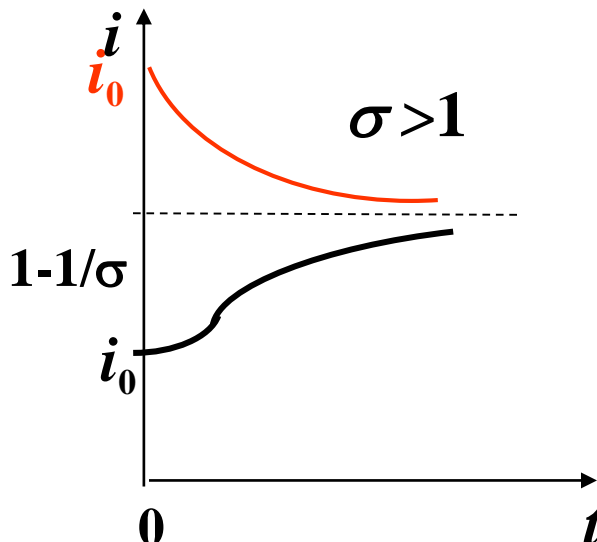
模型3

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \quad \sigma = \lambda / \mu$$

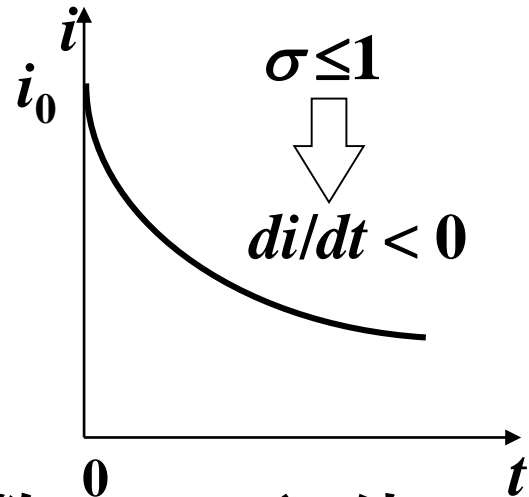
$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right]$$



$\sigma > 1$



$\sigma > 1$



$\sigma \leq 1$

$di/dt < 0$

$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$$

接触数 $\sigma = 1 \sim$ 阈值

$\sigma \leq 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$

$\sigma > 1$

i_0 小 $\Rightarrow i(t)$ 按 S 形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数量

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

传染病模型

模型4

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

SIR模型

假设

1) 总人数 N 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t)$, $s(t)$, $r(t)$

2) 病人的日接触率 λ ，日治愈率 μ ，
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t)$, $s(t)$, $r(t)$ 的两个方程

传染病模型

模型4

SIR模型

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

无法求出 $i(t), s(t)$
的解析解

在相平面 $s \sim i$ 上
研究解的性质

$i_0 + s_0 \approx 1$ (通常 $r(0) = r_0$ 很小)

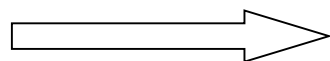
传染病模型

模型4

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去 dt

$$\sigma = \lambda / \mu$$



SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

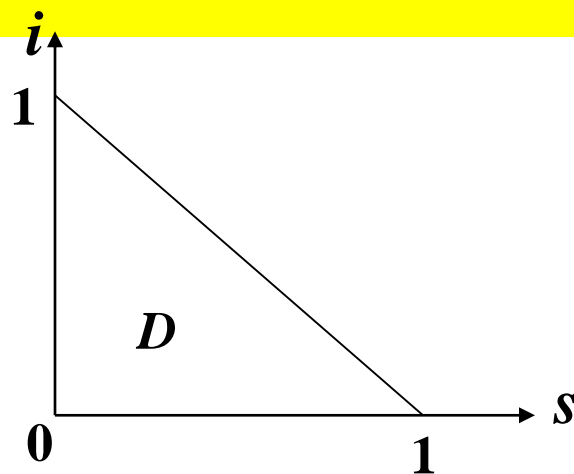
相轨线 \Downarrow

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

在 D 内作相轨线 $i(s)$ 的图形，进行分析



传染病模型

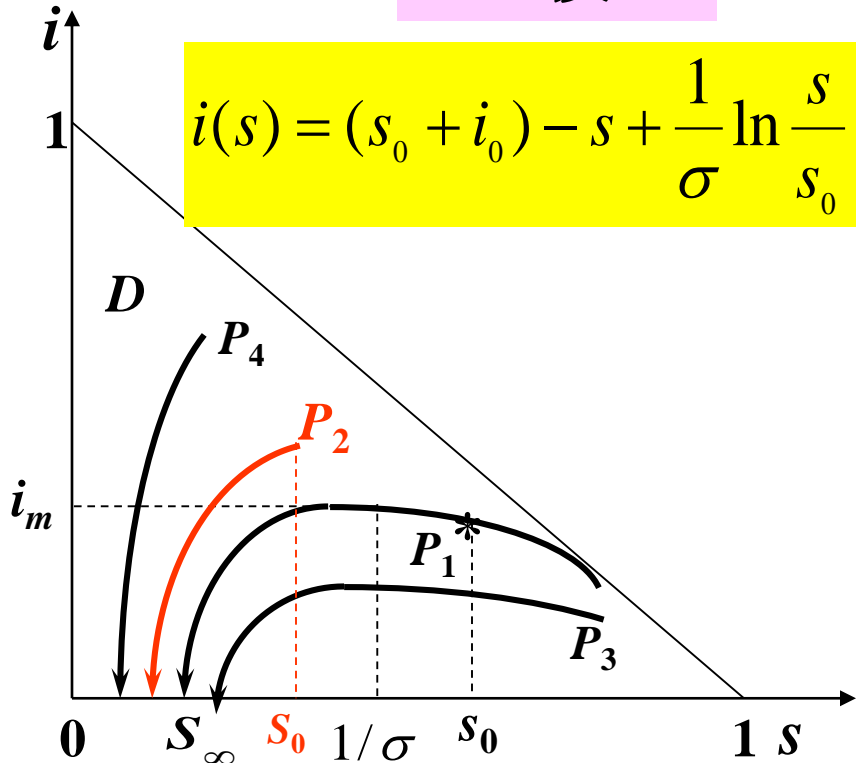
模型4

相轨线 $i(s)$ 及其分析

SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$



s(t) 单调减 → 相轨线的方向

$$s = 1/\sigma, i = i_m \quad t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$$

$$s_\infty \text{ 满足 } s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

$P_1: s_0 > 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 先升后降至0

⇒ 传染病蔓延

$P_2: s_0 < 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 单调降至0

⇒ 传染病不蔓延

1/σ ~ 阈值

传染病模型

模型4

预防传染病蔓延的手段

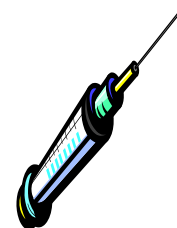
SIR模型

传染病不蔓延的条件—— $s_0 < 1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ \Rightarrow 降低 $\sigma (= \lambda/\mu)$ $\Rightarrow \lambda \downarrow, \mu \uparrow$

λ (日接触率) $\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平 \uparrow

μ (日治愈率) $\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平 \uparrow



- 降低 s_0 \Rightarrow 提高 r_0 \Rightarrow 群体免疫

$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

σ 的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \text{忽略 } i_0$$

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

传染病模型

模型4

被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

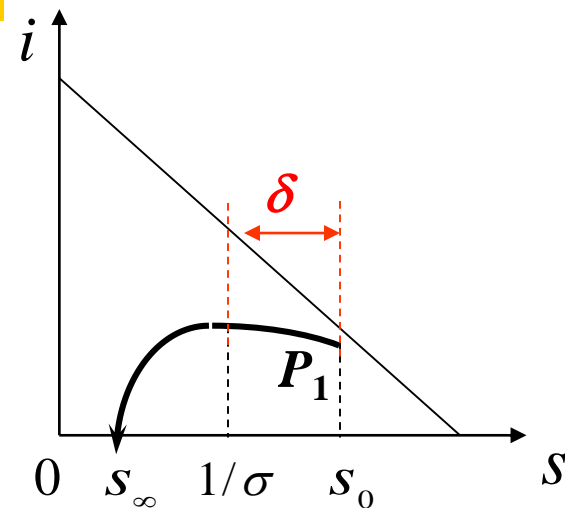
$$i_0 \cong 0, s_0 \cong 1$$

$$x + \frac{1}{\sigma} \ln(1 - \frac{x}{s_0}) \cong 0$$

$$x \ll s_0$$

$$x(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}) \cong 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma(s_0 - \frac{1}{\sigma})$$



$$s_0 - 1/\sigma = \delta$$

$$\delta \text{ 小, } s_0\sigma \cong 1$$

$$x \cong 2\delta$$

提高阈值 $1/\sigma \rightarrow$ 降低
被传染人数比例 x

Species models/种群模型

种群(Population): 是指在特定时间里占据一定空间的同一物种的有机体集合。

种群生态学:

主要研究种群的时间动态及调节机理。

种群分为**单种群**和**多种群**。

种群模型的求解方法:

- 微分方程定性与稳定性理论
- 数值方法

Species models/种群模型

1 单种群的数学模型:

1) 马尔萨斯(Malthus)模型

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad N \text{ 表示 } t \text{ 时刻的种群数量, } r \text{ 称为内禀增长率。}$$

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)}$$

2) 罗杰斯特(Logistic)模型

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \quad K \text{ 表示该种群的最大容纳量。}$$

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-N(t_0)}{N(t_0)} e^{-r(t-t_0)}}$$

Species models/种群模型

3) 一般的种群模型

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N)$$

4) 开发了的单种群模型

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) - h \quad \text{具有常数收获率}$$

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) - h(t) \quad \text{具有时变收获率}$$

2 两种群的一般模型

两种群生活在同一自然环境下，存在下面三种情形，相互竞争、相互依存、弱肉强食。

设甲、乙两种群在 t 时刻的数量为 $x(t)$, $y(t)$ ，则

$$\begin{cases} \frac{dx}{xdt} = r_1 + f_1(x) + g_1(y) \\ \frac{dy}{ydt} = r_2 + f_2(x) + g_2(y) \end{cases}$$

线性化，得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_{10} + a_{11}x + a_{12}y) \\ \frac{dy}{dt} = y(a_{20} + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}$$

Species models/种群模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_{10} + a_{11}x + a_{12}y) \\ \frac{dy}{dt} = y(a_{20} + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}$$

- 1) a_{10} (a_{20}) 表示甲 (乙) 种群的自然增长率;
- 2) $a_{11} = 0, a_{22} = 0$ 表示甲 (乙) 种群为非密度制约,
 $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ 表示甲 (乙) 种群为密度制约;
- 3) $a_{12} < 0, a_{21} < 0$ 表示甲、乙种群相互竞争;
- 4) $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ 表示甲、乙种群相互依存;
- 5) $a_{12}a_{21} < 0$ 表示甲、乙种群为弱肉强食 (捕食与被捕食)。

人口预测和控制

- 年龄分布对于人口预测的重要性
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移

人口 发展 方程

$F(r, t) \sim$ 人口分布函数 (年龄 $< r$ 的人口)

$p(r, t) \sim$ 人口密度函数 $N(t) \sim$ 人口总数

$r_m (\rightarrow \infty) \sim$ 最高年龄

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t)$$

$$p(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

人口预测和控制

人口发展方程

$\mu(r, t) \sim$ 死亡率

$$\begin{array}{ccc} t, \text{ 年龄}[r, r + dr] \text{ 人数} & - & t + dt, \text{ 年龄}[r + dr_1, r + dr_1 + dr] \text{ 人数} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(r, t) dr & - & p(r + dr_1, t + dt) dr \end{array} \quad \frac{\text{死亡人数}}{dt = dr_1} \quad \begin{array}{l} (t, t + dt) \text{ 内} \\ \downarrow \\ \text{死亡人数} \end{array}$$

$$p(r, t) dr - p(r + dr_1, t + dt) dr = \mu(r, t) p(r, t) dr dt$$

$$\begin{aligned} & [p(r + dr_1, t + dt) - p(r, t + dt)] + [p(r, t + dt) - p(r, t)] \\ & = -\mu(r, t) p(r, t) dt, \quad dt = dr_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r, t) p(r, t)$$

一阶偏微分方程

人口预测和控制

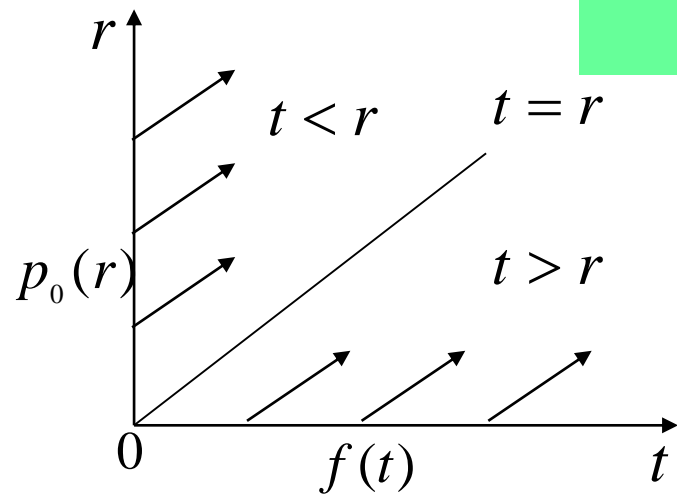
$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t) \\ p(r,0) = p_0(r), \quad r \geq 0 \\ p(0,t) = f(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

人口发展方程

~已知函数（人口调查）

~生育率（控制人口手段）

$$\mu(r,t) = \mu(r) \Rightarrow p(r,t) = \begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s)ds}, & 0 \leq t \leq r \\ f(t-r)e^{-\int_0^r \mu(s)ds}, & t > r \end{cases}$$



$$F(r,t) = \int_0^r p(s,t)ds$$

$$N(t) = \int_0^{r_m} p(s,t)ds$$

人口预测和控制

生育率的分解

$k(r, t) \sim$ (女性)性别比函数

$b(r, t) \sim$ (女性)生育数 $[r_1, r_2] \sim$ 育龄区间

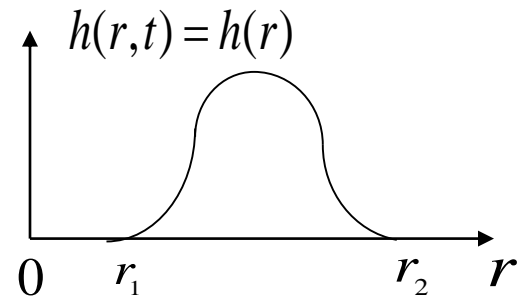
$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r, t) k(r, t) p(r, t) dr$$

$$b(r, t) = \beta(t) h(r, t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r, t) dr = 1 \quad h \sim \text{生育模式}$$

$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r, t) dr \quad \beta \sim \text{总和生育率}$$

$$f(t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} h(r, t) k(r, t) p(r, t) dr$$



人口预测和控制

人口发展方程和生育率

$$f(t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} h(r,t) k(r,t) p(r,t) dr$$

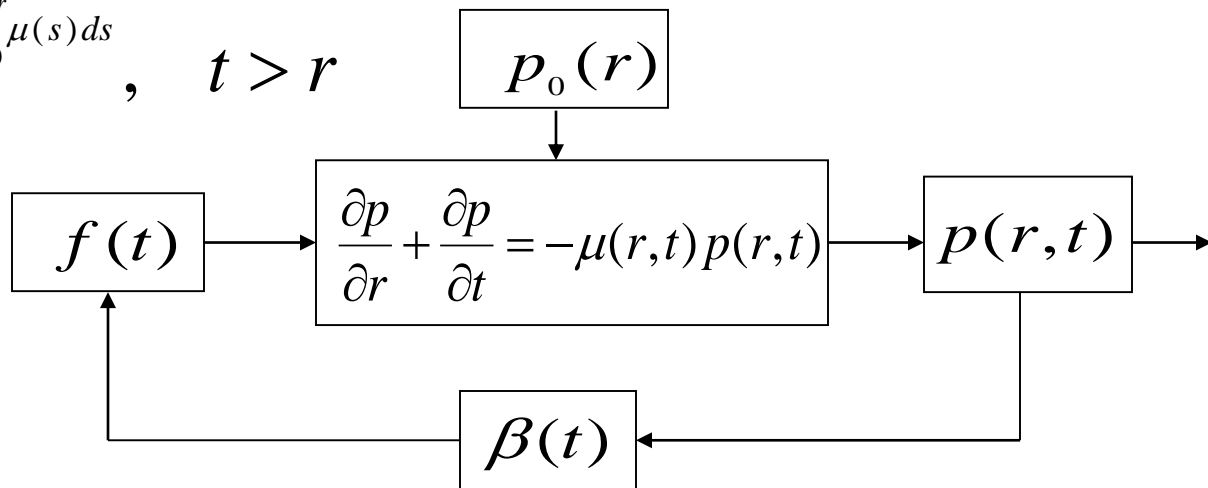
$\beta(t)$ ~ 总和生育率——控制生育的多少

$h(r,t)$ ~ 生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r,t) = \begin{cases} p_0(r-t) e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}, & 0 \leq t \leq r \\ f(t-r) e^{-\int_0^r \mu(s) ds}, & t > r \end{cases}$$

• 正反馈系统

• 滞后作用很大



人口预测和控制

人口指数

1) 人口总数

$$N(t) = \int_0^{r_m} p(r, t) dr$$

2) 平均年龄

$$R(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{r_m} rp(r, t) dr$$

3) 平均寿命

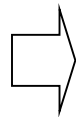
$$S(t) = \int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t} \mu(r, t) dr} d\tau$$

t 时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r, t)$ 计算的平均存活时间

4) 老龄化指数

$$\omega(t) = R(t) / S(t)$$

控制生育率



控制 $N(t)$ 不过大

控制 $\omega(t)$ 不过高

MatLab 实现

符号介绍： D: 微分符号； D2表示二阶微分， D3表示三阶微分...

- **无初值：** `dsolve('Dy=3*x^2','x')`

求解微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \ddot{y} - \dot{y} = 0 \end{cases}, x|_{t=0} = 2; y|_{t=0} = 1; \dot{y}|_{t=0} = 1$$

```
>> dsolve('Dy=3*x^2','y(0)=2','x')
```

```
ans =
```

```
x^3 + 2
```

由于x,y均为t的导数，所以不需要在末尾添加' t' 。

```
>> [x y]= dsolve('Dx=y,D2y-Dy=0','x(0)=2,y(0)=1,Dy(0)=1')
```

```
x =
```

```
exp(t) + 1
```

```
y =
```

```
exp(t)
```


非刚性ode求解命令

求解器solver	功能	说明
ode45	一步算法: 4、5阶龙格库塔方程: 累计截断误差 $(\Delta x)^5$	大部分尝试的首选算法
ode23	一步算法: 2、3阶龙格库塔方程: 累计截断误差 $(\Delta x)^3$	适用于精度较低的情形
ode113	多步算法: Adams	计算时间比ode45短

刚性ode求解命令

ode23t	梯形算法	适度刚性情形
ode15s	多步法: Gear' s反向数值微分: 精度中等	若ode45失效时, 可以尝试使用
ode23s	一步法: 2阶Rosebrock算法: 精度低	当精度较低时, 计算时间比ode15s短
ode23tb	梯形算法: 精度低	当精度较低时, 计算时间比ode15s短

问题：求解常微分方程 $y'' = -ty + e^t y' + 3 \sin 2t$ 。要求首先编写 odefun 函数

令 $x(1) = y, x(2) = y'$ ，那么，微分方程可转换为

$$dx(1) = y' = x(2)$$

$$dx(2) = y'' = -t * x(1) + \exp(t) * x(2) + 3 * \sin(2 * t)$$

在matlab中新建脚本文件，编写函数如下：

```
odefun.m* x +
function dx=odefun(t,x)
-   dx=zeros(2,1);           %初始化dx
-   dx(1)=x(2);
-   dx(2)=-t*x(1)+exp(t)*x(2)+3*sin(2*t);
-   end
```

在 $t=[3.9,4]$ 区间内求解常微分方程 $y'' = -ty + e^t y' + 3 \sin 2t, y|_{t=3} = 8, y'|_{t=3} = 2$ 。

```
main.m x odefun.m* x +
1   %% ode45求解
2   tspan=[3.9 4];           %求解区间
3   y0=[8 2];                %初值
4   [t,x]=ode45('odefun',tspan,y0);
5   %% 画图
6   plot(t,x(:,1),'-o',t,x(:,2),'-*')
7   legend('y','y''')
8   title('y'''' = -t*y+exp(t)*y'' + 3*sin(2*t)')
9   xlabel('t')
10  ylabel('y')
11
```

<https://blog.csdn.net/lynn15600693993>

$$\text{例 4} \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 1000(1-x^2)\frac{dx}{dt} - x = 0 \\ x(0) = 2; x'(0) = 0 \end{cases}$$

解：令 $y_1=x, y_2=y_1'$

则微分方程变为一阶微分方程组：

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0 \end{cases}$$

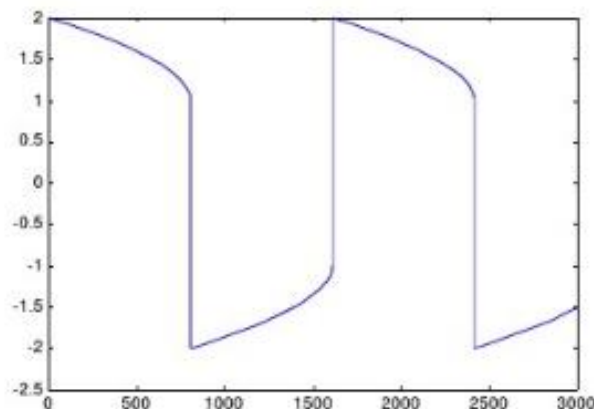
1、建立m-文件vdp1000.m如下：

```
function dy=vdp1000(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

2、取 $t_0=0, t_f=3000$ ，输入命令：

```
[T,Y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]);
plot(T,Y(:,1),'-')
```

3、结果如图



matlab的PDE工具箱

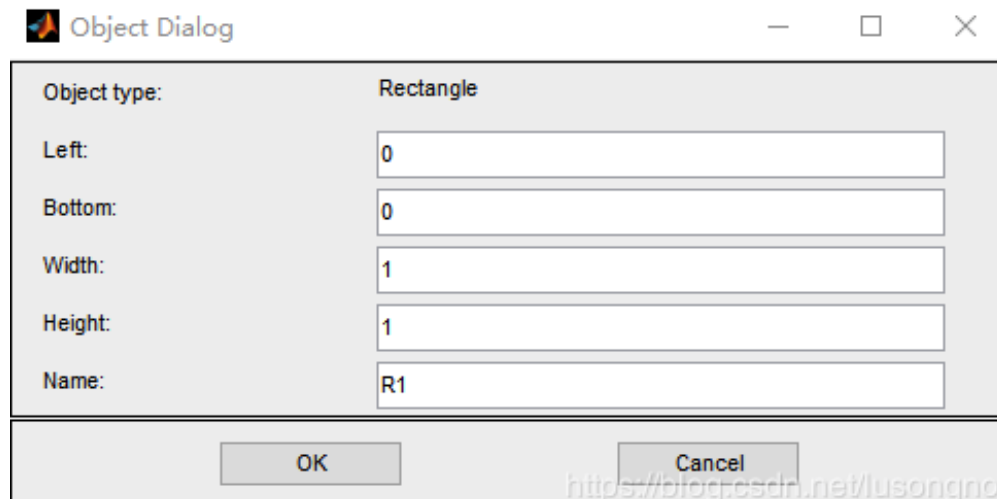
Пример:

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega = [0, 1]^2$$

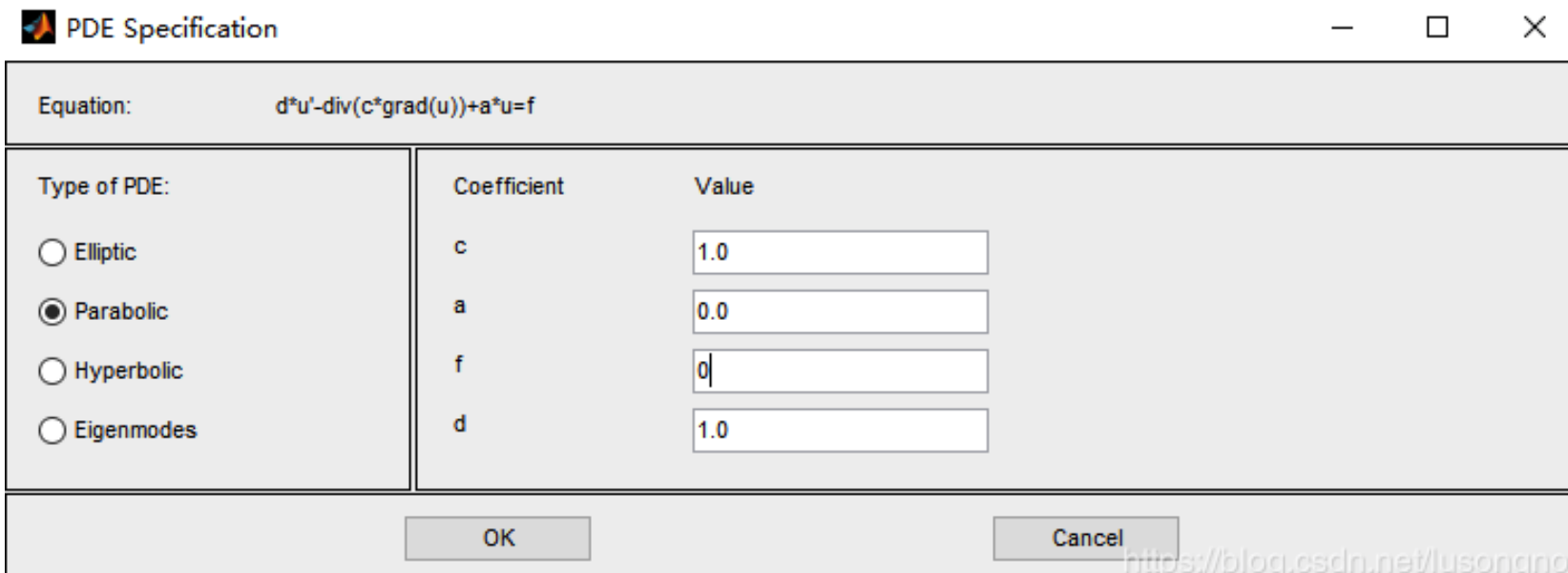
$$n \cdot \nabla u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

$$u(0, x, y) = R_0 - \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$$

- 假定 $R_0=1/4$ ，求解的时间 $t=3/256$
- 命令行输入pdetool打开工具箱使用矩形工具（第一个）拖动绘制矩形。双击画出的矩形，填写Left=0, Bottom=0,Width=1,Height =1



- 点击 $\partial\Omega$ ，边界以红色显示（红蓝绿依次表示狄利克雷（Dirichlet）、诺依曼（Neumann）和混合边界条件）。使用shift和鼠标点击，选中四条边界，设置为诺依曼边界条件，填写 $q=0, g=0$ ，点选OK。
- 点击PDE Specification按钮，选择抛物方程，设置参数如下：



PDE Specification

Equation: $d \cdot u' - \text{div}(c \cdot \text{grad}(u)) + a \cdot u = f$

Type of PDE:

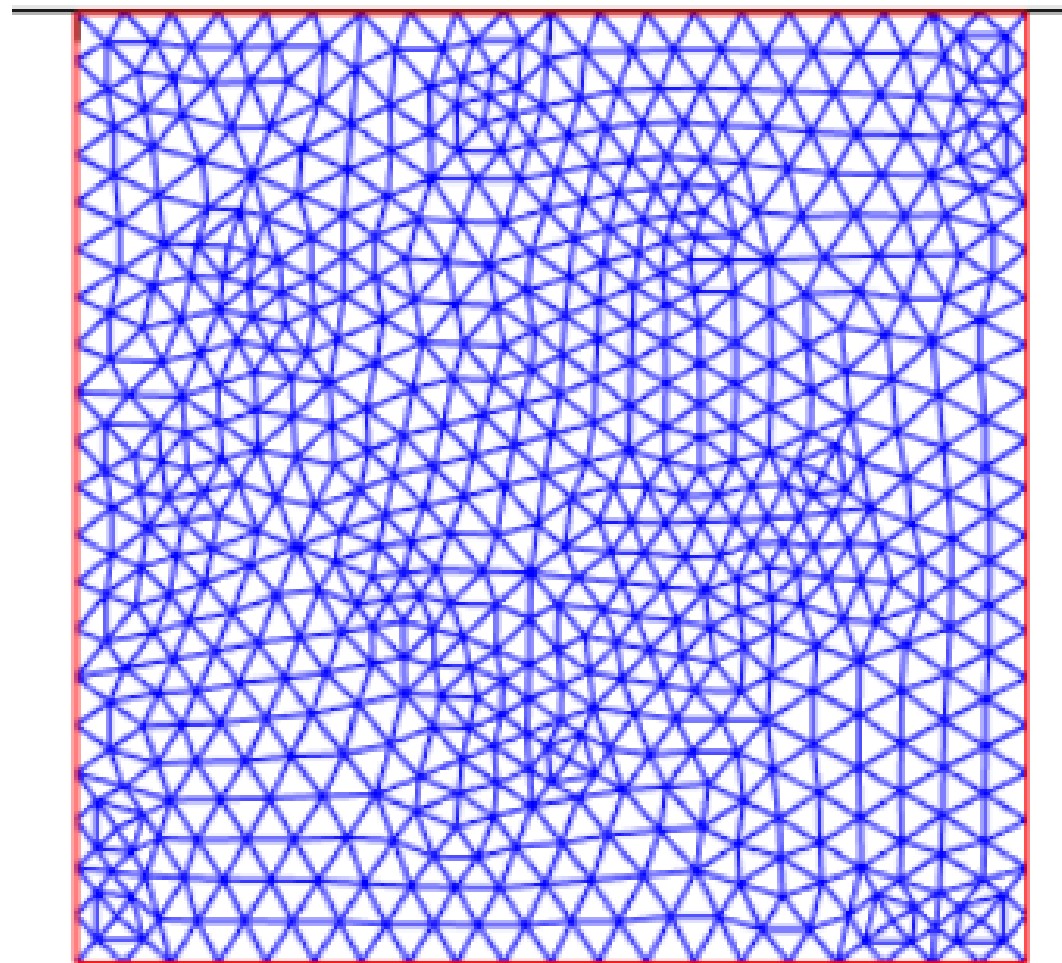
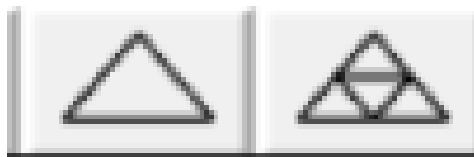
- Elliptic
- Parabolic
- Hyperbolic
- Eigenmodes

Coefficient	Value
c	1.0
a	0.0
f	0
d	1.0

OK Cancel

<https://blog.csdn.net/lusonqno>

- 点击三角形按钮，以及后面的加密按钮，对区域进行三角形剖分。



- 选择Solve下拉菜单中的参数，根据问题设置参数如下：

Solve Parameters

Time:

0:0.001:3/256

u(t0):

$1/4 - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$

Relative tolerance:

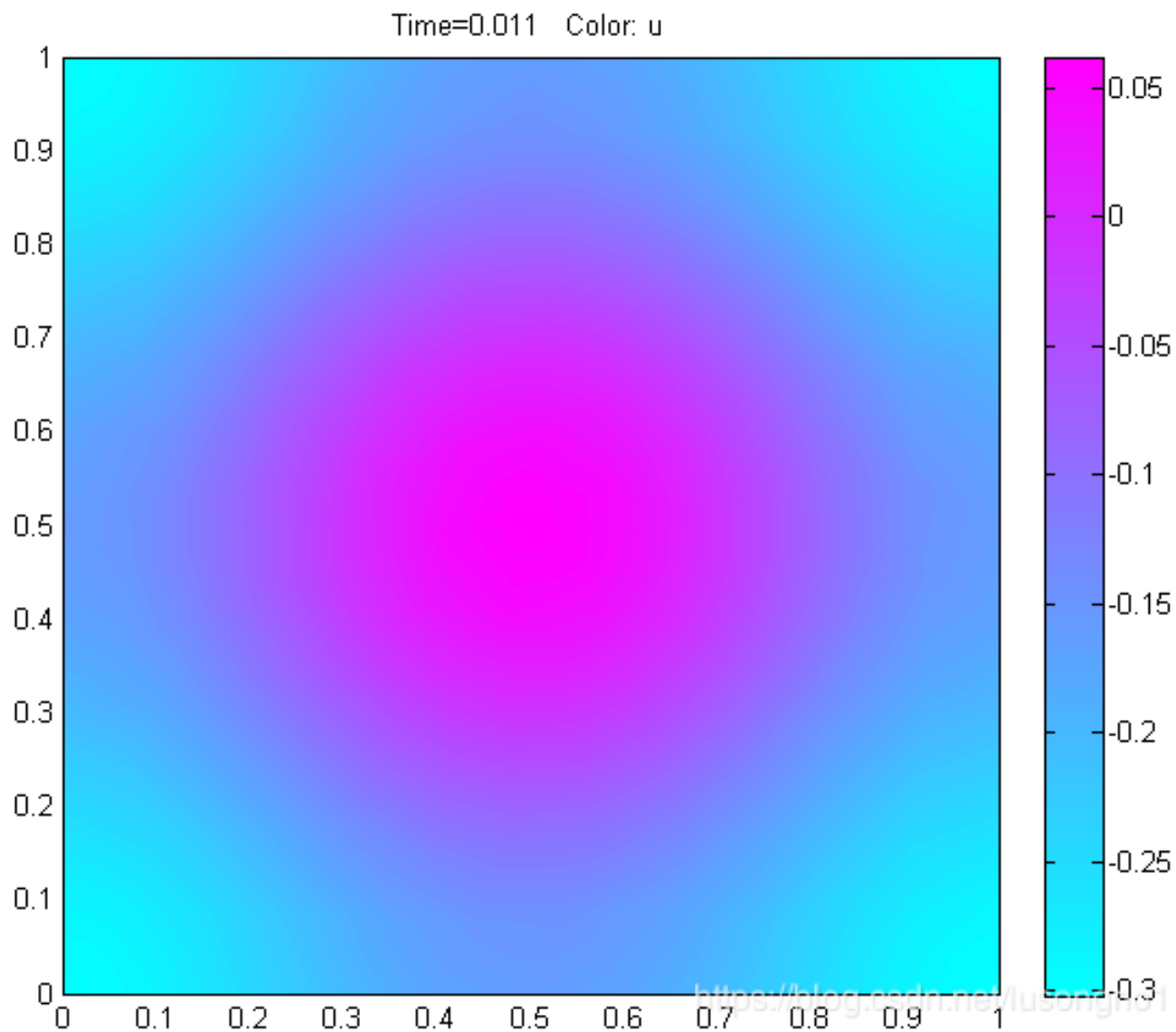
0.01

Absolute tolerance:

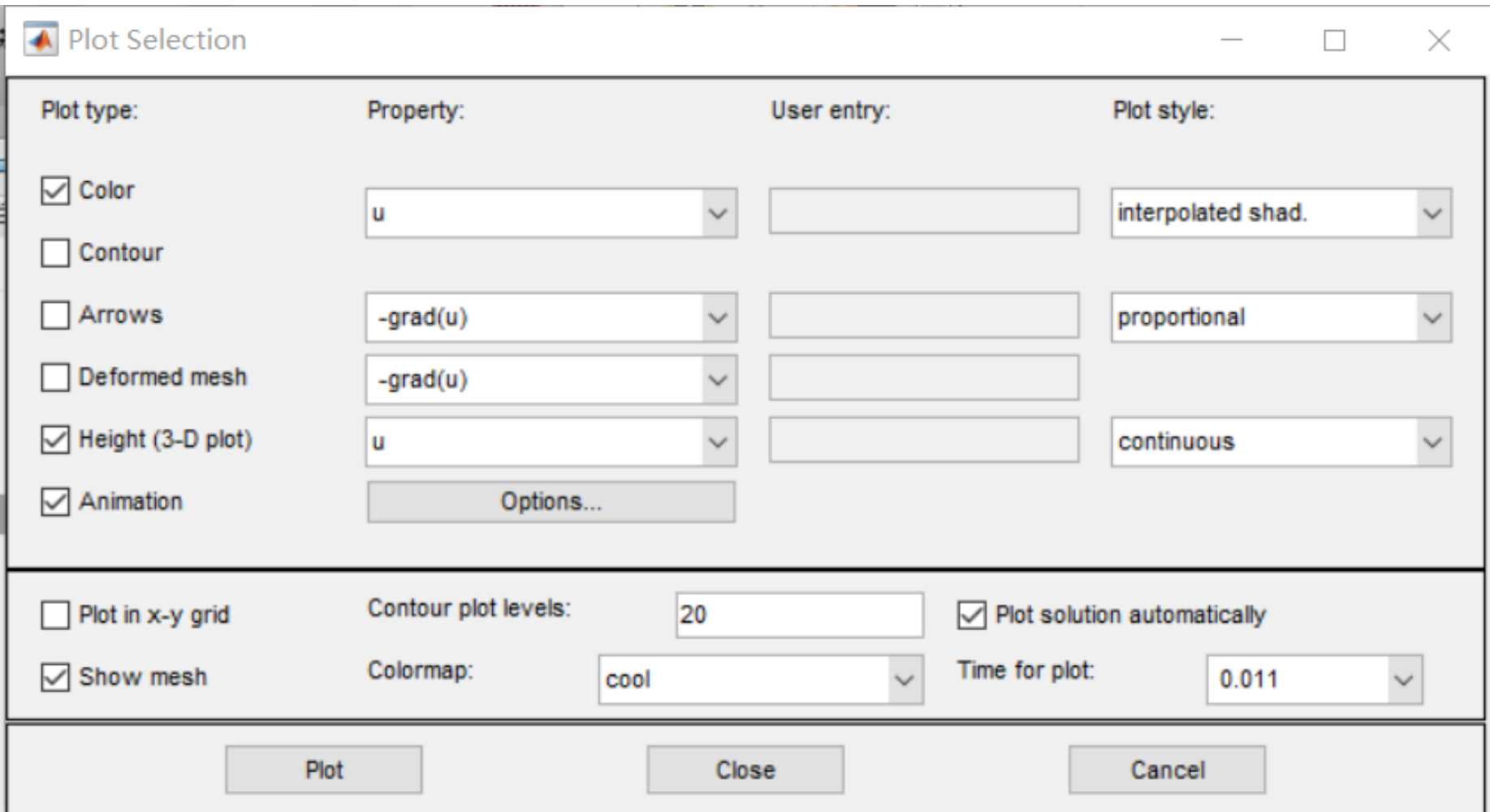
0.001

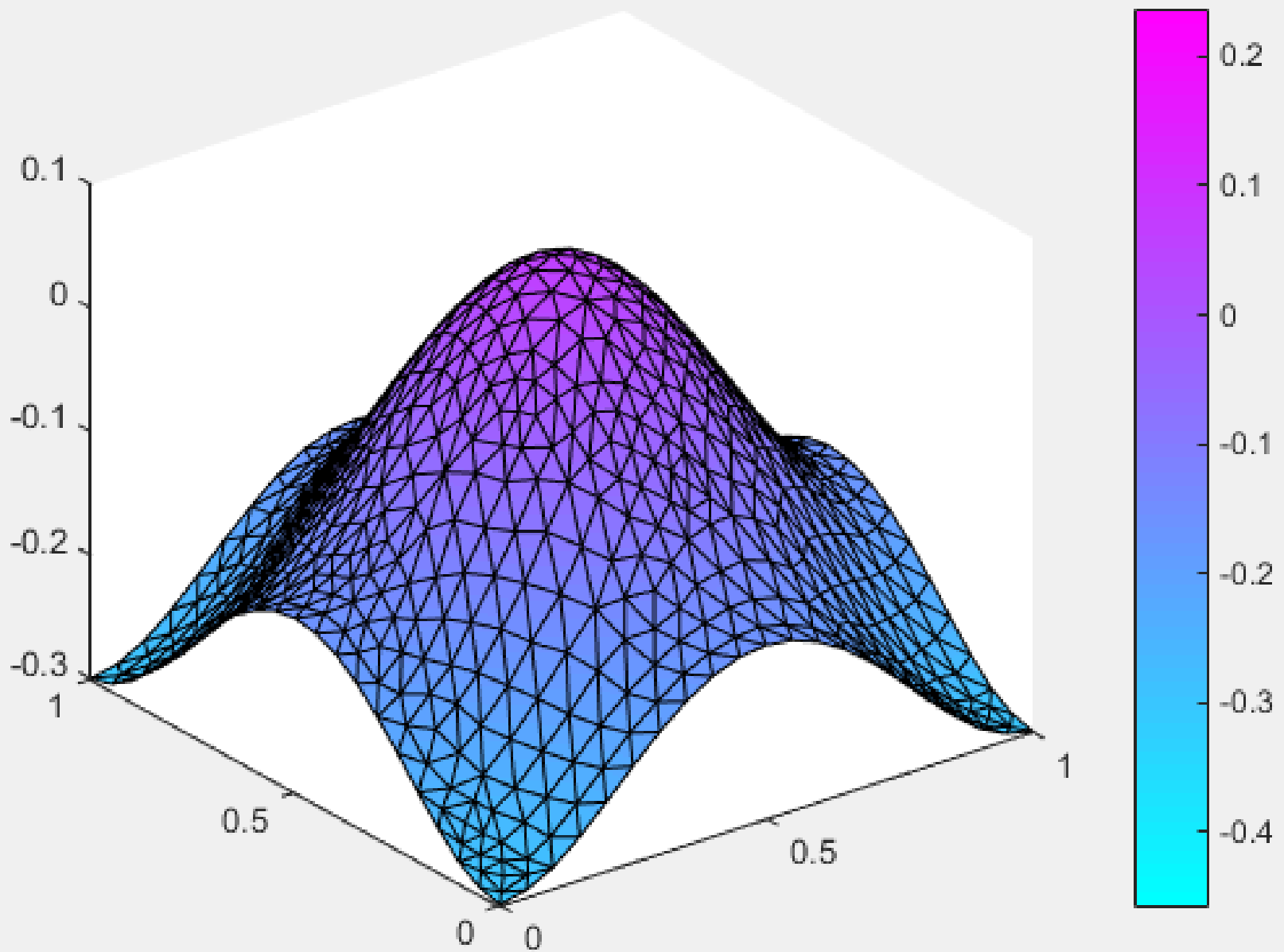
OK Cancel

- 点击等号，即进行求解了。这里一般用颜色的深浅来表示值的大小



- 点击带图案的那个按钮，选中Color选项，以及Height (3-D plot) 选项和Animation选项，其他想勾的也可以勾，比如show mesh。点击plot，就进行绘图以及动画的制作。



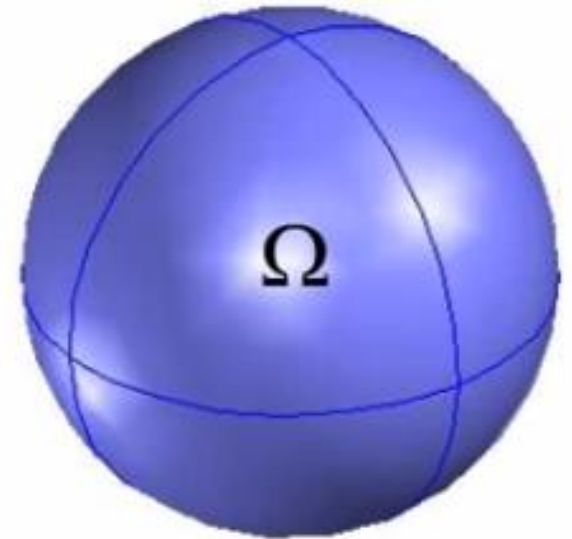


COMSOL Multiphysics

实现

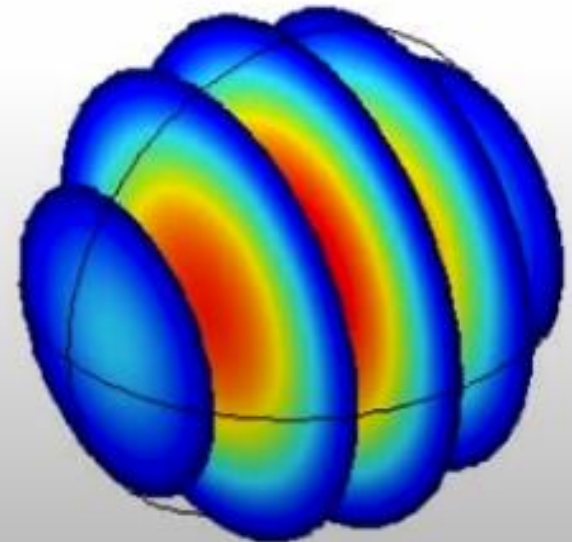
Example: Poisson's Equation

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \nabla u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$



- ▲ Δu Mathematics
 - ▲ Δu PDE Interfaces
 - Δu Coefficient Form PDE (c)
 - Δu General Form PDE (g)
 - Δu Point PDE (w)
 - Δu Boundary PDE (wb)
 - Δu Edge PDE (we)
 - $\int_{\Omega} u$ Weak Form Point PDE (wp)
 - $\frac{d}{dt}$ ODEs and DAEs (ge)
- ▷ Optimization and Sensitivity
- ▷ ∇^2 Classical PDEs
- ▷ Moving Interface
- ▷ Deformed Mesh

You have flexibility and options to implement any PDE system.



COMSOL PDE Templates

Coefficient Form

$$\left\{ \begin{array}{l} e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + a u = f \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{n} \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + q u = g - h^T \mu \\ hu = r \end{array} \right. \quad \text{on } \partial \Omega$$

General Form

$$\left\{ \begin{array}{l} e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F \quad \text{in } \Omega \\ -\mathbf{n} \cdot \Gamma = G - \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right)^T \mu \\ 0 = R \end{array} \right. \quad \text{on } \partial \Omega$$

Implementing your own PDE is just a matter of coefficient matching.

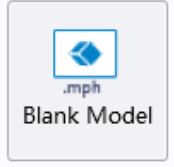
$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot \nabla u = 1 \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \end{array} \right. \Rightarrow c = h = f = 1.$$

A Note about Syntax

$$u_x = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

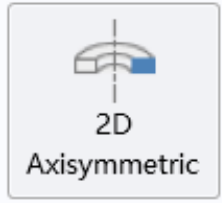
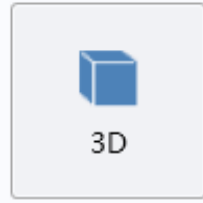
File Home Definitions Geometry Materials Physics Mesh Study Results

New



File Home Definitions Geometry Materials Physics Mesh Study Results

Select Space Dimension



Select Physics

- Heat Transfer
- Optics
- Plasma
- Radio Frequency
- Semiconductor
- Structural Mechanics
- Mathematics
 - PDE Interfaces
 - Coefficient Form PDE (c)
 - General Form PDE (g)
 - Wave Form PDE (wahw)
 - Weak Form PDE (w)
 - Lower Dimensions
 - ODE and DAE Interfaces
 - Optimization and Sensitivity

Added physics interfaces:



Help



Cancel



Done

Review Physics Interface

Coefficient Form PDE (c)

Dependent Variables

Field name:

Number of dependent variables:

Dependent variables:



Units

— Dependent variable quantity

— Source term quantity

Unit:

Select Study

- Presets Studies
 - Eigenvalue
 - Stationary**
 - Time Dependent
- Custom Studies
 - Empty Study

Added study:

Stationary

Added physics interfaces:

△u Coefficient Form PDE (c)

Physics

Help Cancel Done

Stationary













The Stationary study is used when field variables do not change over time.

Examples: In electromagnetics, it is used to compute static electric or magnetic fields, as well as direct currents. In heat transfer, it is used to compute the temperature field at thermal equilibrium. In solid mechanics, it is used to compute deformations, stress, and strains at static equilibrium. In fluid flow it is used to compute steady flow and pressure fields. In chemical species transport, it is used to compute steady-state chemical composition in static flows. In chemical reactions, it is used to compute the chemical composition at equilibrium of a reacting system.

It is also possible to compute several solutions, such as a nonlinear load case, or to track the nonlinear response to a slowly varying load.

Help

Contents

	Stationary
Time Dependent Study Steps	
	Time Dependent
	Time Discrete
	Frequency to Time F
Eigenfrequency Study Steps	
	Eigenfrequency
	Eigenvalue
Frequency Domain Study Steps	
	Frequency Domain
	Frequency-Domain Perturbation
	Frequency to Time F
Study Extensions Steps	
	Batch
	Batch Sweep
	Cluster Computing



File Home Definitions Geometry Materials Physics Mesh Study Results

Application Builder Application Model

Component 1 (comp1) Add Component

Definitions Geometry Materials

Physics Add Physics

Mesh Build Mesh Mesh 1

Study Compute Study 1 Add Study

Results Select Plot Group Add Plot Group Layout

Model Builder

- Untitled.mph (root)
 - Global Definitions
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - Geometry 1
 - Sphere 1 (sph1)
 - Form Union (fin)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Mesh 1
 - Study 1
 - Step 1: Stationary
 - Results

Settings Properties

Sphere

Build Selected Build All Objects

Label: Sphere 1

Object Type

Type: Solid

Size

Radius: 1 m

Position

x: 0 m
y: 0 m
z: 0 m

Axis

Axis type: z-axis

Rotation Angle

Rotation: 0 deg

Layers

Selections of Resulting Entities

Contribute to: None New

Resulting objects selection

Show in physics: Domain sele

Graphics

Messages

Progress Log Table

COMSOL 5.2.0.166


Finalized geometry is empty.
Finalized geometry is empty.
Finalized geometry is empty.

Help

Contents Search

Topic

Sphere

To create a sphere or ball, on the **Geometry** toolbar click **Sphere** (). You can also right-click the **Geometry** node to add this node from the context menu. Then enter the properties of the sphere using the following sections:

OBJECT TYPE

From the **Type** list, select **Solid** or **Surface** to specify if the sphere is a solid object or a (hollow) surface object.

SIZE

Define the radius of the sphere in the **Radius** field.

POSITION

Enter the position of the sphere's center using the **x**, **y**, and **z** fields.

AXIS

Specify the direction of the third axis of the sphere's local coordinate system. From the **Axis type** list, choose **x-axis**, **y-axis**, or **z-axis** (the default) to obtain an axis aligned with the specified

Model Builder



Untitled.mph (root)

- Global Definitions
- Materials
- Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - Boundary System 1 (sys1)
 - View 1
 - Geometry 1
 - Sphere 1 (sph1)
 - Form Union (fin)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Dirichlet Boundary Condition 1
 - Mesh 1
- Study 1
 - Step 1: Stationary
- Results

Untitled.mph - COMSOL

File Home Definitions Geometry Materials Physics Mesh Study Results

Application Builder Model

Definitions Geometry Materials

Physics Mesh

Settings Properties

Dirichlet Boundary Condition

Label: Dirichlet Boundary Condition 1

Boundary Selection

Selection: All boundaries

ON	1
	2
Active	3
	4
	5
	6

Override and Contribution

Equation

Show equation assuming: Study 1, Stationary

$u = r$

$g_{\text{reaction}} = -\mu$

Dirichlet Boundary Condition

Prescribed value of u

r 0 1

Model Builder

- Untitled.mph (root)
 - Global Definitions
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - Boundary System 1 (sys1)
 - View 1
 - Geometry 1
 - Sphere 1 (sph1)
 - Form Union (fin)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Dirichlet Boundary Condition 1
 - Mesh 1
 - Study 1
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
 - Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - Tables
 - 3D Plot Group 1
 - Export
 - Reports

Settings Properties

Stationary

Compute Update Solution

Label: Stationary

Study Settings

Results While Solving

Physics and Variables Selection

Modify physics tree and variables for study step

Physics interface	Solve for	Discretization
Coefficient Form PDE (c)	<input checked="" type="checkbox"/>	Physics settings

Values of Dependent Variables

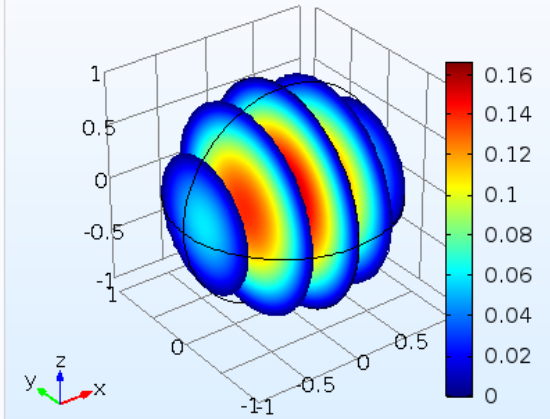
Mesh Selection

Study Extensions

Graphics



Slice: Dependent variable u (1)



Messages Progress Log Table

COMSOL 5.2.0.166
Finalized geometry is empty.
Finalized geometry is empty.
Finalized geometry is empty.
Finalized geometry has 1 domain, 8 boundaries, 12 ed
Complete mesh consists of 8296 domain elements, 84
Number of degrees of freedom solved for: 11965 (plu
Solution time (Study 1): 4 s.